Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2013-2014
UE de Géométrie

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1 (Coordonnées barycentriques)**.** ($\star$) Soit $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine de l'espace $\mathcal{E}$. Montrer que tout point M de $\mathcal{E}$ est barycentre de $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ pour un certain uplet de scalaires $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$. Cet uplet est-il unique ? On appelle $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ un système de coordonnées barycentriques du point M dans le repère $(A_0, \ldots A_n)$.

1. Pour la droite réelle, caractériser les coordonnées barycentriques des points à l'intérieur du segment $[A_0, A_1]$.
2. Pour le plan réel, caractériser les coordonnées barycentriques des points a l'intérieur du triangle $A_0A_1A_2$.
3. Pour la droite reelle, déterminer la position des points de coordonnées barycentriques respectives $(1, 1)$, $(1, 3)$ et $(1, -2)$.
4. Pour la droite complexe (representée par le plan habituel), déterminer la position des points de coordonnées barycentriques $(1, 2)$, $(1 - i, 1 + i)$ et $(1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3})$.

Exercice 2. ($\star$) Soit ABC un triangle du plan affine réel.
Trouver les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C) des points suivants :

1. A, B, C,
2. les milieux des cotés du triangle ABC,
3. le centre de gravité,
4. le centre du cercle inscrit,
5. l'orthocentre,
6. le point commun des transversales concourantes AA', BB', CC'.

Exercice 3. ($\star$) Soient ABC un triangle du plan affine réel, A' le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. En utilisant les coordonnées barycentriques dans le repère affine (A, B, C), montrer que

$$\frac{A'G}{GA} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4. ($\star$) Soit $ABCD$ un quadrangle dans le plan affine réel et soient A', B', C', D', E', F' les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$, $[AC]$, $[BD]$, respectivement.
Montrer que les droites $(A'C')$, $(B'D')$ et $(E'F')$ sont concourantes et le point commun est le milieu de chaque segment.

Exercice 5. ($\star$) Soit ABC un triangle du plan affine et soient $A' \in (BC)$, $B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$. On suppose que les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point X. Calculer

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AA'}} + \frac{\overline{BX}}{\overline{BB'}} + \frac{\overline{CX}}{\overline{CC'}}.$$

Exercice 6 (Théorème de Napoléon)**.** ($\star$) Soit ABC un triangle du plan affine. Soit C' le point tel que BAC' est un triangle équilateral et C et C' ne sont pas du même côté de la doite (AB). On définit similairement les points A' et B' tels que CBA' et ACB' soient équilatéraux.
Soient R, S, T les centres de gravité des nouveaux triangles BAC', CBA' et ACB'.
Montrer que RST est un triangle équilatéral.

Exercice 7. Soit $ABCD$ un quadrangle du plan affine. Soient A' et C' des points tels que BAA' et DCC' soient des triangles équilatéraux à l'extérieur du quadrangle et B' et $'C'$ des points tels que CBB' et ADD' soient des triangles équilatéraux à l'intérieur du quadrangle.
Montrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Exercice 8. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on place trois points A', B', C' tels que $AC'/C'B = BA'/A'C = CB'/B'A$. On définit également A'', B'', C'' comme les symétriques respectifs de A', B', C' par rapport aux milieux des côtés les contenant. Par exemple, $\overrightarrow{A'\frac{B+C}{2}} = \overrightarrow{\frac{B+C}{2}A''}$.
Montrer que l'aire de $A'B'C'$ égale l'aire de $A''B''C''$.

Exercice 9 (Quelques polytopes bien connus et la *topologie affine*)**.** ($\star$)

1. Soient $\mathcal{E} = (X, V)$ un espace affine de dimension d sur les réels et $(P_0, \ldots, P_d)$ un repère affine. Vérifier que les ensembles suivants définissent des polytopes :
   (a) le *parallélépipède* $P = \{P_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} \mid \lambda_i \in [0, 1]\}$;
   (b) le *simplexe plein* $S = \{\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \ldots & P_d \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_d \end{pmatrix} \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1\}$;
   (c) le *cube fermé* $C(P_0, 1) = \{P_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} | \mid \lambda_i| \leq 1\}$;
   (d) le *losange fermé* $L(P_0, 1) = \{P_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} \mid \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i| \leq 1\}$.
2. Donner des exemples de polyèdres non compacts.
3. Trouver les analogues topologiques des deux derniers exemples ci-dessus.
4. Pour tous $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}$, on pose $\overset{\circ}{C}(x, r) = \{x + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \vec{e}_i | \mid \lambda_i| < r\}$, où $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ est une base fixée de V. Montrer que la famille $\mathcal{B}_C = \{\overset{\circ}{C}(x, r) \mid x \in X, \ r \in \mathbb{Q}\}$ est une base d'une topologie pour laquelle $\mathcal{E}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^d$ muni de sa topologie usuelle. On l'appellera *topologie affine*.
5. Montrer que par rapport à la topologie affine toute application affine est continue.
6. Soit R un demi-espace fermé. Quelle est la frontière de R, notée $\mathrm{Fr}(R)$?
7. Montrer que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans $\mathcal{E}$ est compact.
8. Soit S une partie convexe de $\mathcal{E}$. Si $P \in \overset{\circ}{S}$ et $Q \in S$, montrer que l'intérieur du segment ouvert qui les joint, à savoir $\{tP + (1-t)Q \mid t \in]0, 1[\ \}$, est contenu dans $\overset{\circ}{S}$.

Exercice 10 (Représentation minimale d'un polyèdre convexe)**.** ($\star$) Soient $\mathcal{E} = (X, V)$ un espace affine de dimension d sur $\mathbb{R}$ et P un polyèdre convexe d'intérieur non vide dans $\mathcal{E}$. On dira que les demi-espaces $\{R_1, \ldots, R_k\}$ forment une *représentation minimale* de P si $P = \bigcap_{i=1}^{k} R_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et que $P \subsetneq \bigcap_{j \neq i} R_j$. L'objectif de cet exercice est de montrer que cette représentation est unique à l'ordre près.
On pose $H_i = \mathrm{Fr}(P_i)$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $H_i \cap P$ est d'intérieur non vide dans H_i, par rapport à la topologie induite sur H_i en tant que sous-espace topologique. (*Indication : vous pouvez utiliser le point 8 de l'exercice précédent.*)
2. Si H est un hyperplan tel que $H \cap \mathrm{Fr}(P)$ soit d'intérieur non vide dans H, montrer que $H = H_i$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, k\}$.
3. Conclure.

Exercice 11 (Dimension 3 et Euler)**.** Soit P un polytope convexe dans un espace affine de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ jouissant des propriétés suivantes de régularités :
- toutes les faces ont le même nombre s de sommets ;
- de chaque sommet part le même nombre r d'arêtes.
Montrer que $\{r, s\} \in \{\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$.

Exercice 12 (Extrait de l'examen de janvier 2009)**.** On se place dans l' espace affine euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ muni du produit scalaire $\left(\ \mid \ \right)$ et de la distance associée d usuels.
Soit un réel $l > 0$. On appelle n-simplexe régulier de côté l toute partie

$$\Sigma = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbf{R}^n$$

telle que

$$\left(\overrightarrow{z_iz_j} \mid \overrightarrow{z_iz_j}\right) = l^2, \forall i \neq j, 0 \leq i \leq n, \ 0 \leq j \leq n.$$

1. Montrer que pour $0 < i < j \leq n$, on a $\left(\overrightarrow{z_0z_i} \mid \overrightarrow{z_0z_j}\right) = \frac{l^2}{2}$ et que $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ est une base affine de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ l'enveloppe convexe du n-simplexe $\Sigma = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$. Pour $0 \leq i \leq n-1$, appelons i-face de $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ l'enveloppe convexe de toute famille de $i+1$ sommets choisis parmi $z_0, \cdots, z_n$.
   (a) Combien y-a-t-il de i-faces ?
   (b) Une i-face est-elle connexe par arcs ?
   (c) Pour $n = 3$, soient f le nombre de 2-faces, a le nombre de 1-faces et s le nombre de 0-faces de $[z_0, z_1, z_2, z_3]$. Calculer l'entier $s - a + f$. Ceci vous rappelle-t-il un énoncé général ?
3. Soient p et q deux points distincts de $\mathbb{R}^n$ et m le point milieu du segment $[p, q]$. Montrer que l'ensemble des points x de $\mathbb{R}^n$ qui sont équidistants de p et de q (i.e. tels que $d(x, p) = d(x, q)$) est l' hyperplan affine $m+ < \overrightarrow{pq} >^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$.
   Cet hyperplan est appelé l' *hyperplan médiateur* de p et q. Pour un n-simplexe régulier $\Sigma = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ de côté l, on désigne par P_i l'hyperplan médiateur des points z_0 et z_i, $1 \leq i \leq n$.
4. (a) Montrer que
$$x \in P_i \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{z_0 x} \mid \overrightarrow{z_0 z_i}\right) = \frac{l^2}{2},\ 1 \leq i \leq n.$$
   (b) Montrer, en déterminant ses coordonnées dans le repère affine $(z_0; \overrightarrow{z_0 z_1}, \ldots, \overrightarrow{z_0 z_n})$ à l'aide de la question (a), qu'il existe un unique point $z \in \mathbb{R}^n$ (que l'on identifiera) tel que $z \in P_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
   (c) En déduire qu'il existe une unique sphère $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ telle que $\Sigma \subset \mathcal{S}$.
   La sphère $\mathcal{S}$ est appelée la *sphère circonscrite* au n-simplexe Σ.
   (d) Calculer le rayon r_n de la sphère $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ et ensuite $\lim_{n\to\infty} r_n$.
5. Soient $\Sigma = \{z_0, \ldots, z_n\}$ et $\Sigma' = \{z'_0, \ldots, z'_n\}$ deux n-simplexes réguliers de côté l de sphères circonscrites respectives $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique bijection affine $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $h(z_i) = z'_i$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Montrer ensuite que h est une isométrie de $\mathbb{R}^n$. *(On demande une argumentation complète.)*
   (b) Montrer que si h est une bijection affine de $\mathbb{R}^n$ telle que $h(\Sigma) \subset \Sigma'$, alors $h(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$.